正規木表現の代数構造について

An algebraic structure of regular tree expressions

高井 利憲 †‡ 古澤 仁 ‡

Toshinori TAKAI Hitoshi FURUSAWA

†（独）科学技術振興機構 CREST ‡（独）産業技術総合研究所 CVS

CREST, JST CVS, AIST

t-takai@aist.go.jp hitoshi.furusawa@aist.go.jp

Kozen は，文字列上の正規表現の代数構造であるクリーニ代数を発見し，その完全性を示した．一方，木構造データの正規表現に対応する正規木表現については，その代数構造は明らかになっていない．本発表では，正規木表現の持つ代数的構造についてのべ，正規木言語に対する包含関係の決定問題への応用について考察する．

1 はじめに

正規表現の代数的構造についての研究は古くからあり，いくつかクリーニ代数（Kleene algebra）と呼ばれるものが提案されてきた．ただし，現在クリーニ代数といえば，Kozen が 1991 年に提案した，ホーン節を含む公理系を指す [4]．Kozen の提案したものは，正規表現に対して完全である．

一方，木構造データに対し，文字列上と同じように，木構造オートマトン，正規木言語，そして，正規木表現という概念が知られている [2]．しかし，正規木表現については，連接やクリーニスターが複数あるなど，複雑な定義になっており，クリーニ代数のような代数構造は明らかになっていない．

本発表ではまず，クリーニ代数の公理を少し変更した擬クリーニ代数を提案する．正規木表現の連接は，左分配則が成り立たないことや，不動点によるクリーニスターが定義が文字列上のクリーニスターと違うことから，新たな代数構造を提案する．次に，正規木表現に現れる代入定数と呼ばれるものに注目し，それらを単位元とする擬クリーニ代数を複数含むような代数系として，ソート付き擬クリーニ代数を提案する．これは，正規木表現でなりたつ性質を公理として列挙することによる，正規木表現の代数化の試みである．最後に，正規木言語に対する包含関係の決定問題への応用について考察する．

2 準備

本節では，いくつか表記法を導入した後，正規木表現の定義を紹介する．

集合 A に対し，A の冪集合を $\mathscr{P}(A)$ と書く．Σ をシグネチャとしたときに，Σ から生成される変数を含まない項全体を，$\mathtt{T}_\Sigma$ と書く．項の部分集合を木言語と呼ぶ．文脈等，項に関する基本的な概念については，Baader らの教科書を参考にしてほしい [1]．

文字列上の正規言語の表現法の一つに，正規表現がある．木言語に対しては，正規言語に対応する概念に，正規木言語がある．文字列の場合と同じように，正規木言語の表現法の一つに，正規木表現が知られている．**正規木表現**(*regular tree expression*) は，シグネチャ Σ に対し，次のように帰納的に定義される．

1. $\mathbf{0}$ は正規木表現である．
2. $\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}}$ の要素は正規木表現である．ここで，$\Box_i$ $(i \geq 0)$ は，Σ に含まれない定数で，**代入定数**と呼ぶことにする．
3. e_1, e_2 が正規木表現なら，$e_1 + e_2$，$e_1 \cdot_i e_2$，$e_1^{*_i}$ $(i \geq 0)$ も正規木表現である．

Σ 上の正規木表現全体を，$\mathrm{RegExp}_{\mathtt{T}}(\Sigma)$ と表す．正規木表現の意味は，次の関数

$$[\_] \colon \mathrm{RegExp}_{\mathtt{T}}(\Sigma) \to \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}})$$

で定義する． 通常は $[\_]$ の値域としては，$\Box_i$ $(i \geq 0)$ を含まない項の集合を考えるが，ここでは，正則木表現として，例えば $\Box_1$ という表現も許しており，その意味として，$\{\Box_1\}$ という項の集合を考えるので，上のような定義とする． 準備として，関数 $\circ_i \colon \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}}) \times \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}}) \to \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}})$ と $\star_i \colon \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}}) \to \mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i \mid i\geq 0\}})$ $(i \geq 0)$ を定義する．まず，項

の集合 L_1, L_2 に対し，$L_1 \circ_i L_2$ について，$|L_1| = 1$ の場合を考える．ここで，$L_1 = \{t\}$ とする．

1. $t = \Box_i$ のとき，$\{\Box_i\} \circ_i L_2 = L_2$ とする．
2. $t = \Box_j$ かつ $i \neq j$ のとき，$\{\Box_j\} \circ_i L_2 = \{\Box_j\}$ とする．
3. $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のときは次のとおりとする．

$$\{f(t_1, \ldots, t_n)\} \circ_i L_2 = \\ \{f(s_1, \ldots, s_n) \mid s_j \in \{t_j\} \circ_i L_2, 1 \leq j \leq n\}.$$

$|L_1| \neq 1$ の場合，$L_1 \circ_i L_2 = \bigcup_{t \in L_1} \{t\} \circ L_2$ とする．次に，$\star^i$ を定義するため，少し準備する．集合 L に対し，$L^{n,i}$ $(n \geq 0)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} L^{0,i} &= \{\Box_i\} \\ L^{n+1,i} &= (L \cup \{\Box_i\}) \circ_i L^{n,i} \end{aligned}$$

上を使い，$L^{\star_i} = \bigcup_{j \geq 0} L^{j,i}$ とする．正規木表現の意味を定義する．

1. $[\mathbf{0}]$ は空集合とする．
2. 正則木表現 e が，$e \in \mathrm{T}_{\Sigma \cup \{\Box_i | i \geq 0\}}$ のとき，$[e] = \{e\}$ とする．
3. e が，$e_1 + e_2$ の形をしているとき，$[e_1 + e_2] = [e_1] \cup [e_2]$ とする．
4. e が，$e_1 \cdot_i e_2$ の形をしているとき，$[e_1 \cdot_i e_2] = [e_1] \circ_i [e_2]$ とする．
5. e が $e_0^{*_i}$ の形をしているとき，$[e_0^{*_i}] = [e_0]^{\star_i}$ とする．

この，$[\_]$ の像はちょうど**正規木言語**(*regular tree language*) 全体と一致する [2]．正規木言語全体を $\mathrm{Reg}_{\mathrm{T}}(\Sigma)$ と表す．以下では，上で定義した正規木表現のための代数構造を考える．正規木表現上の順序 $\leq$ を，「$e_1 \leq e_2$ であるのは，$[e_1] \subseteq [e_2]$ であるとき」と定義する．$e_1 \leq e_2$ かつ $e_1 \geq e_2$ のとき，$e_1 = e_2$ と書く．

3 擬クリーニ代数

ここでは，クリーニ代数を少し変更した公理系を定義する．**擬クリーニ代数** (*pseudo Kleene algebra*) とは，$\mathcal{K} = (K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ であり，次の公理を満たすものとする．ここで，演算子 * をクリーニスター，$\cdot$ を連接とよび，連接は公理の中では省略してある．

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a + b) + c && (1) \\
a + b &= b + a && (2) \\
a + 0 &= a && (3) \\
a + a &= a && (4) \\
a(bc) &= (ab)c && (5) \\
1a &= a && (6) \\
a1 &= a && (7) \\
(a + b)c &= ac + bc && (8) \\
c(a + b) &\geq ca + cb && (9) \\
0a &= 0 && (10) \\
1 + aa^* &\leq a^* && (11) \\
b + (a + 1)x \leq x &\to a^*b \leq x && (12)
\end{aligned}$$

順序 $\leq$ は，$a \leq b$ は，$a + b = b$ として定義される．公理 (12) は，ホーン節であり，$\to$ は含意である．クリーニ代数と違うところは，

1. 右分配則が一方向しかない（上では，(9)），
2. 0 が $\cdot$ の右ゼロ元ではない，
3. クリーニスターの定義（上では，(11)）が片側しかない，
4. クリーニスターの不動点による特徴づけ（上では，(12)）も片側しかなく，かつ
5. 少し形が違う，

点である．連接に関する特徴づけが，クリーニ代数と比べて，片側しかないという点で，Möller の提案した緩クリーニ代数（Lazy Kleene algebra）と近い [5]．違いは，緩クリーニ代数は，

1. 右分配則がまったくない，
2. 連接が単調であることが公理として仮定される，
3. 上の (12) の代わりに，クリーニ代数の場合と同じ公理
$$b + ax \leq x \to a^*b \leq x \qquad (13)$$
をもつ，

点である．以下では，緩クリーニ代数と擬クリーニ代数を比較する．まず，公理 (12) $b + (a + 1)x \leq x \to a^*b \leq x$ は，緩クリーニ代数で証明可能である．$b + (a + 1)x \leq x$ を仮定する．緩クリーニ代数の連接 $\cdot$ の単調性により，$b + ax \leq x$ が得られる．緩クリーニ代数の公理 $b + ax \leq x \to a^*b \leq x$ により，

$a^*b \le x$ が成り立つ．しかし，次のこともいえる．証明は，後述する命題 4 の直後に行う．

命題 1. 緩クリーニ代数の公理 *(13)* $b + ax \le x \to a^*b \le x$ は，擬クリーニ代数では証明可能でない． □

次に，$\cdot$ の単調性を調べる．$\to$ を含意とする．$a \le b \to ac \le bc$ について，$a \le b$，すなわち，$a + b = b$ とすると，

$$\begin{array}{rcll} ac & \le & ac + bc & (\le \text{の定義}) \\ & = & (a+b)c & (\text{公理 (8)}) \\ & = & bc & (\text{仮定より}) \end{array}$$

となる．また，$a \le b \to ca \le cb$ について，$a \le b$ とすると，

$$\begin{array}{rcll} ca & \le & ca + ca & (\le \text{の定義}) \\ & \le & c(a+b) & (\text{公理 (9)}) \\ & = & cb & (\text{仮定より}) \end{array}$$

となる．以上の議論より，次が言える．

補題 2. 擬クリーニ代数の連接 $\cdot$ は単調である． □

4 正規木表現の代数構造

定義より，各 $i (i \ge 0)$ と正規木表現 e に関して，

$$\Box_i \cdot_i e = e \cdot_i \Box_i = e \tag{14}$$

が成り立つ．また，各 $i (i \ge 0)$ と正規木表現 e_1, e_2, e_3 に対し

$$e_1 \cdot_i (e_2 \cdot_i e_3) = (e_1 \cdot_i e_2) \cdot_i e_3 \tag{15}$$

も成り立つことは次のように確かめられる．$[e_1 \cdot_i (e_2 \cdot_i e_3)]$ に含まれる項は一般に，$C[t_1, \ldots, t_n]$ と書ける．ここで，C は文脈，$C[\Box_i, \ldots, \Box_i] \in [e_1]$，$t_i \in [e_2 \cdot_i e_3]$ $(1 \le i \le n)$ である．また，各 t_i は，一般に，$C_i[t_{i,1}, \ldots, t_{i,m_i}]$ と書ける．ここで，C_i は文脈，$C_i[\Box_i, \ldots, \Box_i] \in [e_2]$，$t_{i,j} \in [e_3]$ $(1 \le j \le m_i)$ である．ここで，$C[C_1[\Box_i, \ldots, \Box_i], \ldots, C_n[\Box_i, \ldots, \Box_i]] \in [e_1 \cdot_i e_2]$ であり，$C[C_1[t_{1,1}, \ldots, t_{1,m_1}], \ldots, C_n[t_{n,1}, \ldots, t_{n,m_n}]] \in [(e_1 \cdot_i e_2) \cdot_i e_3]$ である．逆も同じように確かめられる．左分配則および一方向の右分配則

$$\begin{array}{rcll} (e_1 + e_2) \cdot_i e_3 & = & e_1 \cdot_i e_3 + e_2 \cdot_i e_3 & (16) \\ e_3 \cdot_i (e_1 + e_2) & \ge & e_3 \cdot_i e_1 + e_3 \cdot_i e_2 & (17) \end{array}$$

は，$\circ_i$ の定義より明らかである．各 $i (i \ge 0)$ と正規木表現 e に対し，

$$\Box_i + e \cdot_i e^{*_i} \quad \le \quad e^{*_i} \tag{18}$$

が成り立つことを確かめる．定義より，$\{\Box_i\} \subseteq [e^{*_i}]$ である．$[e \cdot_i e^{*_i}] \subseteq [e^{*_i}]$ に対しては，任意の $t \in [e \cdot_i e^{*_i}]$ に対し，$t \in [e^{*_i}]$ を示す．定義より，$[e \cdot_i e^{*_i}] = [e] \circ_i ([e]^{0,i} \cup [e^{1,i}] \cup \cdots)$ なので，$C[\Box_i, \ldots, \Box_i] \in [e]$，$t = C[t_1, \ldots, t_n]$，$t_j \in [e]^{k_j,i}$ なる文脈 C，項 t_j，整数 k_j $(1 \le j \le n)$ が存在する．定義より，任意の j に対し，

$$L^{j,i} \subseteq L^{j+1,i}$$

なので，$k = \max\{k_j \mid 1 \le j \le n\}$ とすると，$t \in [e] \circ_i [e]^{k,i}$ となる．定義より，$[e] \circ_i [e]^{k,i} \subseteq [e^{*_i}]$ なので，$t \in [e^{*_i}]$ となる．また，各 $i (i \ge 0)$ と正規木表現 e に対し，

$$e_1 + (e_2 + \Box_i) \cdot_i e \le e \quad \Rightarrow \quad e_2^{*_i} \cdot_i e_1 \le e \tag{19}$$

も成り立つ．分配則により，

$$e_1 + (e_2 + \Box_i) \cdot_i e \le e \tag{20}$$

を仮定し，任意の $j \ge 0$ に対し，$[e_2]^{j,i} \circ_i [e_1] \subseteq [e]$ を示せば十分である．$j = 0$ のときは，仮定 (20) より成り立つ．$j = n$ のときを仮定し，$n+1$ のときを示す．$[e_2]^{n+1,i} \circ_i [e_1] = (([e_2] \cup \{\Box_i\}) \circ_i [e_2]^{n,i}) \circ_i [e_1] = ([e_2] \cup \{\Box_i\}) \circ_i ([e_2]^{n,i} \circ_i [e_1])$ となる．帰納法の仮定および仮定 (20) および $\circ_i$ の単調性により (19) が成り立つ．まとめると，(14)，(15)，(16)，(17)，(18) および (19) などにより次がいえる．

命題 3. シグネチャ Σ と各 i $(i \ge 0)$ に対し，$(\mathrm{Reg}_{\mathtt{T}}(\Sigma), \emptyset, \{\Box_i\}, \cup, \circ_i, {}^{\star_i})$ は擬クリーニ代数をなす． □

さらに，演算 $\cup, \circ_i, {}^{\star_i}$ $(i \ge 0)$ は，正規木言語だけでなく，任意の木言語に対しても定義され，またそれぞれ，擬クリーニ代数の公理を満たしていることは，上の議論と同じように確かめられる．

命題 4. シグネチャ Σ と各 i $(i \ge 0)$ に対し，$(\mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma \cup \{\Box_i \mid i \ge 0\}}), \emptyset, \{\Box_i\}, \cup, \circ_i, {}^{\star_i})$ は擬クリーニ代数をなす． □

ここで，命題 1 の証明を行う．準備として，木言語 L と自然数 n と代入定数 $\Box_i$ に対し，$L^{n,\cdot_i}$ を次

のように定義する．

$$L^{0,\cdot_i} = \{\Box_i\}$$
$$L^{n+1,\cdot_i} = L \circ_i L^{n,\cdot_i}$$

上を使い，$L^{\circledast_i} = \bigcup_{j\geq 0} L^{j,\cdot_i}$ とする．

シグネチャを $\Sigma = \{f, c\}$ とし，f を 2 引数，c を定数とする．Σ から構成される擬クリーニ代数 $(\mathscr{P}(\mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i|i\geq 0\}}), \emptyset, \{\Box_i\}, \cup, \circ_i, {}^{\star_i})$ のなかで，

$$b + a \circ_i x \subseteq x \tag{21}$$

が成り立っていても，

$$a^{*_i} \circ_i b \subseteq x \tag{22}$$

が成り立たないような，b, a, x を以下のように与える．

$$b = [\Box_i],\ a = [f(\Box_i, \Box_i)],\ x = [f(\Box_i, \Box_i)]^{\circledast}.$$

すると，(21) が成り立つが，(22) は成り立たない．

以下では，正規木表現が満たす代数構造を提案する．準備として，正規木表現に対し，代入定数に関する情報を返す関数 $\mathtt{sort}\colon \mathrm{RegExp}_{\mathtt{T}}(\Sigma) \to \mathscr{P}(\{\Box_i \mid i \geq 0\})$ を定義する．

1. $e \in \mathtt{T}_{\Sigma\cup\{\Box_i|i\geq 0\}}$ のとき，$\mathtt{sort}(e)$ を，e に含まれる代入定数全体の集合とする．例えば，$e = f(\Box_1, \Box_1, \Box_2)$ のときは，$\mathtt{sort}(e) = \{\Box_1, \Box_2\}$ である．
2. e が，$e_1 + e_2$ のとき，$\mathtt{sort}(e_1 + e_2) = \mathtt{sort}(e_1) \cup \mathtt{sort}(e_2)$ とする．
3. e が，$e_1 \cdot_i e_2$ のとき，$\mathtt{sort}(e_1 \cdot_i e_2) = (\mathtt{sort}(e_1) - \{i\}) \cup \mathtt{sort}(e_2)$ とする．
4. e が，$e_1^{*_i}$ のとき，$\mathtt{sort}(e_1^{*_i}) = \mathtt{sort}(e_1) \cup \{i\}$ とする．

各 $i, j (i, j \geq 0)$ と正規木表現 e_1, e_2, e_3 に対し

1. $j \notin \mathtt{sort}(e_1)$ ならば $(e_1 \cdot_i e_2) \cdot_j e_3 = e_1 \cdot_i (e_2 \cdot_j e_3)$
2. $i \notin \mathtt{sort}(e_1)$ かつ $e_2 \neq \mathbf{0}$ ならば $e_1 \cdot_i e_2 = e_1$
3. $i \in \mathtt{sort}(e_1)$ ならば $e_1 \cdot_i \mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $j \notin \mathtt{sort}(e_2)$ かつ $i \notin \mathtt{sort}(e_3)$ ならば $(e_1 \cdot_i e_2) \cdot_j e_3 = (e_1 \cdot_j e_3) \cdot_i e_2$

などが成り立つ．

$\mathcal{L} = (\mathtt{L}, \vee, \wedge, \neg, \top, \bot)$ をブール代数とする．ソート付き擬クリーニ代数 (many-sorted pseudo Kleene algebra) とは，

$$\mathcal{T} = (\mathtt{A}, +, \{\cdot_B\}_{B\in\mathtt{L}}, 0, \{1_B\}_{B\in\mathtt{L}}, \{{}^{*_B}\}_{B\in\mathtt{L}}, \mathtt{sort}, \mathcal{L})$$

で，次の条件を満たしているもの．ここで，$\mathtt{A}$ は台集合, その他の演算子は,

$$+, \cdot_B\colon \mathtt{A}\times\mathtt{A}\to\mathtt{A} \quad 0, 1_B\colon \mathtt{A} \quad {}^{*_B}\colon \mathtt{A}\to\mathtt{A} \quad (B\in\mathtt{L})$$

である．関数 $\mathtt{sort}\colon \mathtt{A} \to \mathtt{L}$ は，直感的には，$\mathtt{A}$ の要素に対し，ソートを関連付けるものである．

- 各 $B \in \mathtt{L}$ に対し, $(\mathtt{A}, +, \cdot_B, 0, 1_B, {}^{*_B})$ は擬クリーニ代数
- $\mathtt{sort}(0) = \bot$
- 各 $B \in \mathtt{L}$ に対し, $\mathtt{sort}(1_B) = B$
- $\mathtt{sort}(\alpha + \beta) = \mathtt{sort}(\alpha) \cup \mathtt{sort}(\beta)$
- $B \not\leq \mathtt{sort}(\alpha)$ かつ $\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot_B \beta = \alpha$
- $B \leq \mathtt{sort}(\alpha) \Rightarrow \mathtt{sort}(\alpha \cdot_B \beta) = (\mathtt{sort}(\alpha) - B) \cup \mathtt{sort}(\beta)$
- $B' \not\leq \mathtt{sort}(\alpha) \Rightarrow (\alpha \cdot_B \beta) \cdot_{B'} \gamma = \alpha \cdot_B (\beta \cdot_{B'} \gamma)$
- $B' \not\leq \mathtt{sort}(\beta)$ かつ $B \not\leq \mathtt{sort}(\gamma) \Rightarrow (\alpha \cdot_B \beta) \cdot_{B'} \gamma = (\alpha \cdot_{B'} \gamma) \cdot_B \beta$
- $B' \not\leq \mathtt{sort}(\beta) \Rightarrow (\alpha \cdot_B \beta) \cdot_{B'} \beta = (\alpha \cdot_{B'} 1_B) \cdot_B \beta$
- $B \not\leq \mathtt{sort}(\alpha) \Rightarrow \alpha^{*_B} = 1_B + \alpha$
- $B \leq \mathtt{sort}(\alpha) \Rightarrow \mathtt{sort}(\alpha^{*_B}) = \mathtt{sort}(\alpha)$
- $B \not\leq \mathtt{sort}(\beta) \Rightarrow (\alpha + \beta)^{*_B} = \alpha^{*_B} \cdot_B \beta$ □

上に挙げた公理の中には，冗長なものも含まれているかもしれないが，いづれも正規木表現においては成り立つものであり，また，今後完全な公理化を目指すうえでも，定理はなるべくたくさんあったほうがよいため，ここに列挙した．

5 応用

本節では，提案したソート付き擬クリーニ代数を用いた正規木言語の包含関係判法について例で示す．

例 1. シグネチャを $\Sigma = \{f, g, c\}$ とする．木構造オートマトン [2] A_1 を，

$$\{c \to q,\ g(q) \to q_1,\ g(q) \to q_2,\ f(q_1, q_2) \to q\},$$

木構造オートマトン A_2 を，

$$\{c \to q,\ g(q) \to q_1,\ f(q_1, q_1) \to q,\ f(q, q) \to q\}$$

とする．ここで，Σ に含まれるもの以外の記号は，オートマトンの状態記号であり，両方とも終了状態を q とする．このとき，A_1 と A_2 の受理言語の包含関係を調べたいとする．効率を考えない方法では，一方のオートマトンの否定を取り，もう一方との積オートマトンを考え，その空問題に帰着させる．

ここでは，まず，A_1 と A_2 の受理言語の正規木表現 e_1 と e_2 を考える．それぞれ，$e_1 = f(g(\Box_1), g(\Box_1))^{*_1} \cdot_1 c$,

$$e_2 = (f(\Box_2, \Box_2)^{*_2} \cdot_2 g(\Box_1))^{*_1} \cdot_1 c$$

となる．e_1 は，

$$e_1' = (f(\Box_2, \Box_2) \cdot_2 g(\Box_1))^{*_1} \cdot_1 c$$

と変換できる．この変換は，提案した公理によるものではないため，項の正規木表現に関しては，なんらかの標準形のようなものが必要になると予想される．さて，e_1' と e_2 は，連接演算子の単調性により，$e_1' \leq e_2$ であることがわかり，A_1 の受理言語は，A_2 の受理言語に含まれることがわかる．

6 まとめ

本発表では，正規木表現で成り立つ性質を列挙することにより，正規木表現の代数化を試みた．今後は，まずは，完全な代数構造の発見を目指したい．

Kozen は，提案したクリーニ代数が，正規表現に対して完全であることを示すために，クリーニ代数上の行列を定義し，有限オートマトンおよびその受理言語を，行列とそのクリーニスターで表現した．正規木表現に対しても，今回提案したものが完全であるか否かは不明であるが，完全なものが発見できた暁には，同じ方針で証明できると予想される．そのときの，行列の行と列は，文字列上の時のように有限オートマトンの状態に対応するのではなく，与えられた木構造オートマトンの状態集合の部分集合に対応すると予想する．

他の方向として，正規木表現のクリーニスターの意味を定義するために用いた木言語上の関数 $\star_i$ $(i \geq 0)$ の定義を，命題 1 の証明に用いた $^{\circledast}$ など，いろいろ考えることにより，正規木言語でないような言語を含む自明でない擬クリーニ代数を考えることができるかもしれない．

また，今後は，構造化文書に関する研究 [3] への応用も考えていきたい．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[2] Comon, H., Dauchet, M., Gilleron, R., Jacquemard, F., Lugiez, D., Tison, S. and Tommasi, M.: *Tree Automata Techniques and Applications*, draft, 1999.

[3] Hosoya, H., Vouillon, J. and Pierce, B. C.: Regular expression types for XML, *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, Vol. 27, No. 1, pp. 46–90, January 2005.

[4] Kozen, D.: A Completeness Theorem for Kleene Algebras and the Algebras of Regular Events, *Proc. 6th symp. Logic in Comput. Sci.*, pp. 214–225, IEEE, 1991.

[5] Möller, B.: Lazy Kleene Algebra, Mathematics of Program Construction, *Proc. 7th International Conference (MPC 2004)*, Stirling, Scotland, UK, LNCS 3125, pp. 252–273, July 12-14, 2004.