

2次元セルラーオートマトン上での 最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計

内野 博貴[†] 梅尾 博司[†]

Hiroki Uchino Hiroshi Umeo

[†] 大阪電気通信大学大学院工学研究科

{uchino, umeo}@cyt.osakac.ac.jp

1 はじめに

2次元セルラーオートマトンにおける最適時間一斉射撃アルゴリズムは、これまでに Beyer [1], Shih-nahr [6], Teraoka, Hisaoka, Maeda, Umeo [8], Umeo, Maeda, Fujiwara [9] らにより提案されている。これらのアルゴリズムは、一次元一般化一斉射撃アルゴリズムをベースとするものであり, Shinar [6] は 28 状態の一斉射撃アルゴリズムを, Teraoka, Hisaoka, Maeda, Umeo [8] は 14 状態の最適時間アルゴリズムを実現している。本稿では, 2次元アレイを L 字型一次元アレイの集合体ととらえ, それらの上で従来から知られている左端あるいは右端を将軍状態とする一次元同期アルゴリズムを利用する。2次元アレイの為の最適時間アルゴリズムを提案する。アルゴリズムの構築において, Umeo [10] による計算状況の凍結・解答手法 (Freezing-Thawing Technique) が利用されている。まず 2 節では, 2次元セルラーオートマトンと一斉射撃問題について述べ, 3 節では, サイズ $m \times n$ の 2次元アレイを $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップで同期するアルゴリズムの詳細を示す。最後に 4 節では, 今後の残された問題について論ずる。

2 2次元セルラーオートマトン

2次元セルラーオートマトン (2-D CA) は, セルが平面上に格子構造で配置されたモデルである。2-D CA は, 縦に m 個, 横に n 個のセルが配置された空間を, サイズ $m \times n$ の 2-D CA と呼ぶ。

全てのセルは, ノイマン近傍の隣接した位置にあるセル上, 下, 左, 右と通信リンクで接続されており, 通信リンクで繋がっているセル同士は 1 ステップで互いの状態を読み取る事ができる。最外周に位置するセルは, 壁と隣接していると仮定する。2-D CA における状態遷移は, 上, 下, 左, 右の近傍情報と, 自身の状態の組み合わせにより状態遷移する。状態遷移は全てのセルが同時に行い, セルが状態遷移を

1 回する時間を単位とし, 1 ステップと呼ぶ。

2-D CA における信号はの伝播速度は, $1/1$ のように分数で表す。これは, 1 ステップに 1 セル信号が伝播するという事を表しており, 2 ステップに 1 セル伝播する信号は, $1/2$ の速度で伝播していると表す。以下では, $1/1$ の速度で伝播する信号を $1/1$ 信号と呼ぶ。

次に一斉射撃問題について述べる。全てのセルが静止状態であるセル空間に将軍状態 (General) と呼ばれる特殊な状態を配置する。(図 3.6) 将軍状態は, セル空間の端 (1-D CA ならば左端, 2-D CA ならば左上) に配置された時刻を開始時刻 ($t = 0$) とし, 信号を送信する。

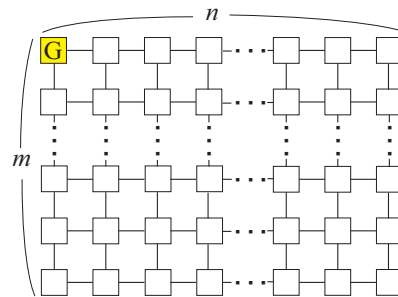


図 1: サイズ $m \times n$ の 2次元アレイ。

未来のある時刻 $t =$ において全てのセルを射撃状態へ状態遷移させる状態遷移関数を作成する事が一斉射撃問題の目的である。射撃状態は, $t =$ の時刻以外には現れる事は無く, 全てのセルが射撃状態になる事で一斉射撃問題は終了する。最適時間とは, 「これ以上早く同期する事は不可能である」と証明された時間で, 最適時間で同期するアルゴリズムを最適時間アルゴリズムと呼ぶ。1-D CA ではセル数 n のセル空間に対して最適時間は $2n - 2$ となり, 2-D CA では $n \times m$ のサイズにおいては, $m + n + \max(m, n) - 3$

となることが知られている。

3 最適時間一斉射撃アルゴリズム

本節では、サイズ $m \times n$ の 2 次元アレイを $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップで一斉射撃する同期アルゴリズムを示す。以下では、一般性を失うこと無く $m < n$ と仮定する。サイズ $m \times n$ の 2 次元アレイ M を、図 2 に示すような m 個の L 型 (正確には、文字 L を時計方向まわりに 90° 回転させたものである) 1 次元アレイから構成されると考える。

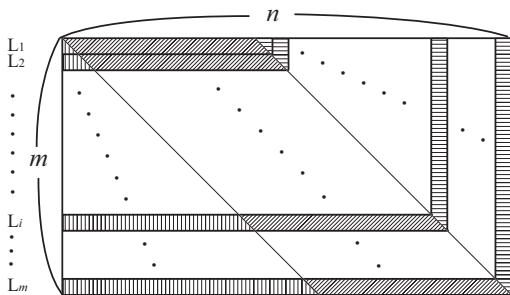


図 2: m 個の L 字型 1 次元アレイから構成される 2 次元アレイ。

これらを L_1, L_2, \dots, L_m で示す。分割の数学的な定義は後述する。任意の $i (1 \leq i \leq m)$ に対して、 L_i を同時刻 $T(m, n) = m + n + \max(m, n) - 3$ 時に一斉射撃することにより、 M を同期状態に導く。それぞれの L 型 1 次元アレイは、3 つのセグメントに分割される。 i 番目の L 型アレイ $L_i (1 \leq i \leq m)$ はそれぞれ長さ $i, n - m, i$ の 1 次元アレイからなる。各セグメント上では、 $t = 0$ 時に左端あるいは右端に將軍状態を配置する一斉射撃アルゴリズムを動作させる。各セグメントの長さは短いので、従来から知られているアルゴリズムを使用すると一般的には比較的早期に一斉射撃状態におちいるが、各セグメントの同期時刻を $T(m, n)$ に一致させるために、Umeo[13] により考案された凍結・解凍技法 (Freezing-Thawing Technique) を使用する。詳細は後述する。

[定義 1] M をサイズ $m \times n$ の 2 次元セルオートマトンとし、座標 $(1, 1)$ に位置するセルを $C_{1,1}$ 、 (m, n) に位置するセルを $C_{m,n}$ とする。 M を $L_1 \sim L_m$ のセル列に分割する。 $L_i (1 \leq i \leq m)$ に属するセルを以下に定義する。

$m < n$ の場合、

$$L_i = \{ C_{i,j} C_{k,i} | 1 \leq j \leq i + (n - m), 1 \leq k \leq i \}$$

となり、 L_i は 3 つのセグメントに分割される。各セグメントに属するセルを以下に定義する。

$$\text{第 1 セグメント} = \{ C_{i,j} | 1 \leq j \leq i \}$$

$$\text{第 2 セグメント} = \{ C_{i,j} | i \leq j \leq i + (n - m) \}$$

$$\text{第 3 セグメント} = \{ C_{j,i} | 1 \leq j \leq i \}$$

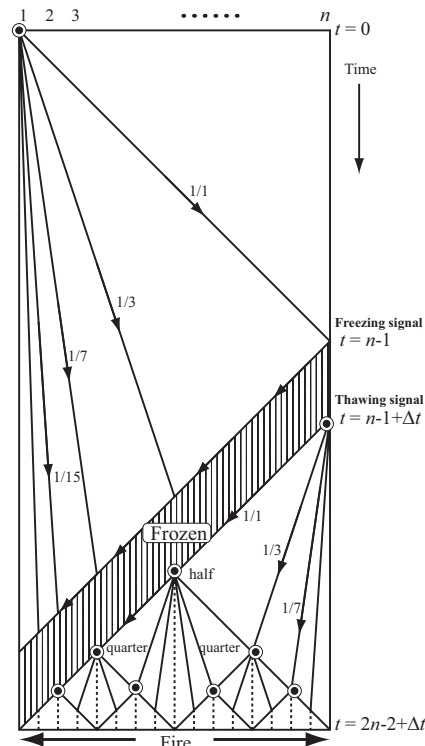


図 3: 1 次元一斉射撃アルゴリズムの凍結解凍技法を用いて、 Δt ステップの時間遅延。

3.1 凍結・解凍技法

1 次元一斉射撃問題における凍結・解凍技法とは、アレイ上での同期時間を遅延させる方法である。凍結・解凍技法は、凍結信号と解凍信号の 2 種類の信号を制御する事で、 n 個のセルからなる 1 次元セルオートマトンの同期時間を遅延させることができる。凍結信号は、伝播している任意の信号と衝突すると衝突したセルで停滞させる。停滞した信号は解凍信号と衝突するまで、凍結信号と衝突した位置に停滞し続ける。この 2 種類の信号、凍結信号・解凍信号が通過した n 個のセル列は、同期時間が信号の通過した時間差分遅れる。この時間差を凍結・解

凍技法によって発生させた遅延と呼ぶ。

[補題 1] M を n 個のセルからなるセル空間上で最適時間一斉射撃アルゴリズムを実行する任意の 1 次元セルオートマトンとする。 $t = 0$ 時における将軍の位置をアレイの左端とし、 $\Delta t (\geq 1)$ を任意の正整数とする。 M は $t = n - 1 + \Delta t$ ステップ時に、外界から右端のセルに特別な信号が与えられるものとする。この時、 $t = 2n - 2 + \Delta t$ ステップ時に一斉射撃するセルオートマトンを M から構成することができ、射撃に要する時間を Δt ステップ遅延させることができる (図 3 参照)。

3.2 アレイのマーキングと将軍状態の生成

まず、最初に M を m 個の L 型アレイに分割するためのマーキングについて説明する。 $t = 0$ 時、 M 上の C_{11} に将軍状態 G が置かれ、ほかの全てのセルは静止状態にあるとする。 G から $t = 0$ 時に 3 つの信号 S_V, S_D, S_H が、垂直下方、右下 45° の方向、水平方向に発せられる。これらの信号は $1/1$ の速度で伝播し、それぞれ $t = m - 1, 2m - 2, n - 1$ 時に最初の目標点である C_{m1}, C_{mn}, C_{1n} に到着する。右下 45° の方向に進む信号 S_D は、 $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{mm}$ 上に第 2 セグメントの開始を示す記号をマークする。次に C_{m1} ならびに C_{1n} に到達した信号 S_V, S_H はそこで反射し、伝播速度を $1/2$ に減速して再び C_{11} を目指して先程の道筋を逆方向に戻る。 S_V は新たな行に到達する度に、各 L 型アレイの第 1 セグメントを一斉射撃する為の将軍状態を生成する。 L_i 上には $t = 3m - 2i - 1$ 時に将軍状態が作られる。 S_H は第 1 セグメント上に同様に第 3 セグメントを一斉射撃する為の将軍状態を生成する。 L_i の第 3 セグメントに対しては、 $t = 2m + n - 2i - 1$ 時に将軍状態が作られる。 S_H による将軍状態の生成は、後ほど説明する理由により、 $t = 2m + n - 3$ の時間に $C_{1,n-m}$ 上で終了する。

3.3 L_i の一斉射撃

まず、 L_m 上での一斉射撃アルゴリズムを説明する。 $m < n$ と仮定した L_m の時間空間図式を図 5 に示す。 L_m は S_V の信号が到達する $t = m - 1$ 時間に C_{m1} に第 1 セグメントを一斉射撃する為の将軍状態を生成する。同様に、 S_H の信号が到達する $t = n - 1$ 時間に C_{1n} に第 3 セグメントを一斉射撃する為の将

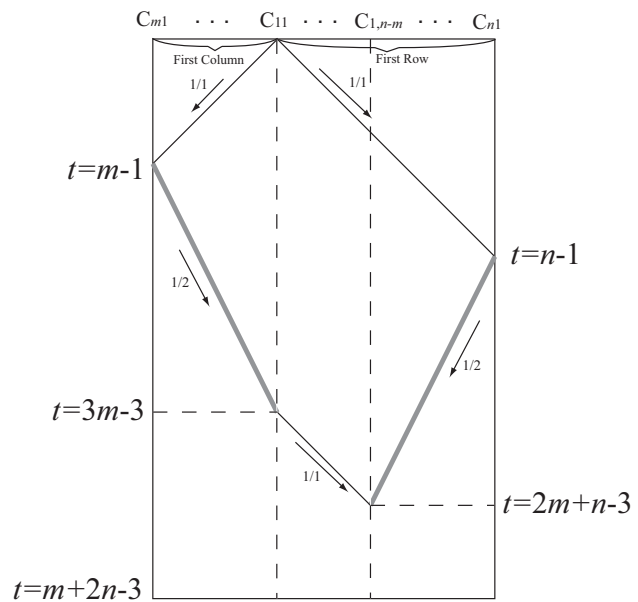


図 4: 第 1 セグメント並びに第 3 セグメント上に将軍状態を生成するための時間・空間図式。

軍状態を生成する。生成された将軍は L_m 上に信号を送信する。第 1 セグメントに生成された将軍からの信号は、 S_D と衝突すると、反射し第 1 セグメントを凍結させる為の凍結信号となる。この時、第 1 セグメント上を $1/2$ の速度で伝播する信号は冷凍・解凍の制御に使用するため信号を凍結させない。第 1 セグメントに生成された将軍が送信した信号と、 S_D が衝突した地点 C_{mm} に第 2 セグメントを一斉射撃する為の将軍状態を生成する。第 2 セグメントに生成された将軍は第 1 セグメントに生成された将軍と同様の信号を送信する。第 2 セグメントの将軍が送信した信号は、第 3 セグメントの将軍が送信した信号と衝突し、第 2 セグメントと第 3 セグメントを凍結させる。凍結した 3 つのセグメントを解凍する信号は、第 1 セグメントを解凍する信号は第 2 セグメントより、第 2 セグメントを解凍する信号は第 3 セグメントより、第 3 セグメントを解凍する信号は第 2 セグメントより伝播される。凍結したセグメントは、解凍信号を異なるセグメントから受け取る事で、3 つのセグメントは単一での動作をせず、異なるセグメントの影響を受ける。

L_i のセル列も基本的には L_m のセル列と同様のアルゴリズムで動作する。 L_m のアルゴリズムと異なる点は、 L_m のアルゴリズムが第 2 セグメントの将軍を生成する位置を S_D との衝突地点だったが、 L_i のア

ルゴリズムは S_D の軌跡と衝突すると第 2 セグメントの將軍状態を生成する事と、1,2,3 セグメント目の將軍を生成する時間が異なる事の 2 点である。

L_1 のセル列は、第 1, 第 3 セグメントの長さが 1 となったセル列である。 L_1 は他のセル列と異なり特殊な形になってしまう為、凍結を用いない最適時間一斉射撃アルゴリズムを用いてセル列を同期させる。

[補題 2] L_i を [定義 1] で表したセル列とする。 L_i を左端 $C_{i,1}$, 右端 $C_{1,i+(n-m)}$ の 1 次元配列として考える。 L_i には 3 つの信号が伝播される。左端に $m + 2(m - i) - 1$ の時間に到達する信号。右端に $n + 2(m - i) - 1$ の時間に到達する信号。左端より m の位置に $2i$ の時間に到達する信号。これら 3 つの信号が L_i に伝播された場合、上記のアルゴリズムを使用する事により、 L_i を同期させる事ができる。

3.4 $m > n$ と仮定した場合

$m > n$ の場合と $m < n$ の場合の違いは、第 2 セグメントの位置と第 2 セグメントへ解凍信号を送るセグメントが異なる事である。 $m > n$ と仮定した場合、 S_D は L_n の第 3 セグメントを伝播する信号と衝突し C_{nn} に第 2 セグメントの將軍状態を生成する。この第 2 セグメントの將軍は $n < m$ の場合に生成された將軍とは異なり、 C_{n1} 方向へ信号を伝播せず、 C_{mn} の方向へ信号を伝播する。さらに、他の $L_i (1 \leq i \leq n)$ も L_n と平行に信号を伝播する。各 L_i の第 2 セグメントは第 1 セグメントと衝突すると、 $m < n$ の第 3 セグメントと衝突した動作を対称にとる。すなわち、第 2 セグメントは第 3 セグメントの解凍信号を生成し、第 1 セグメントは、第 2 セグメントの解凍信号を伝播する。このように、サイズの異なる場合でも第 2 セグメントの動作を変更する事で、いかなるサイズの $m \times n$ の場合においてもこのアルゴリズムは動作する。

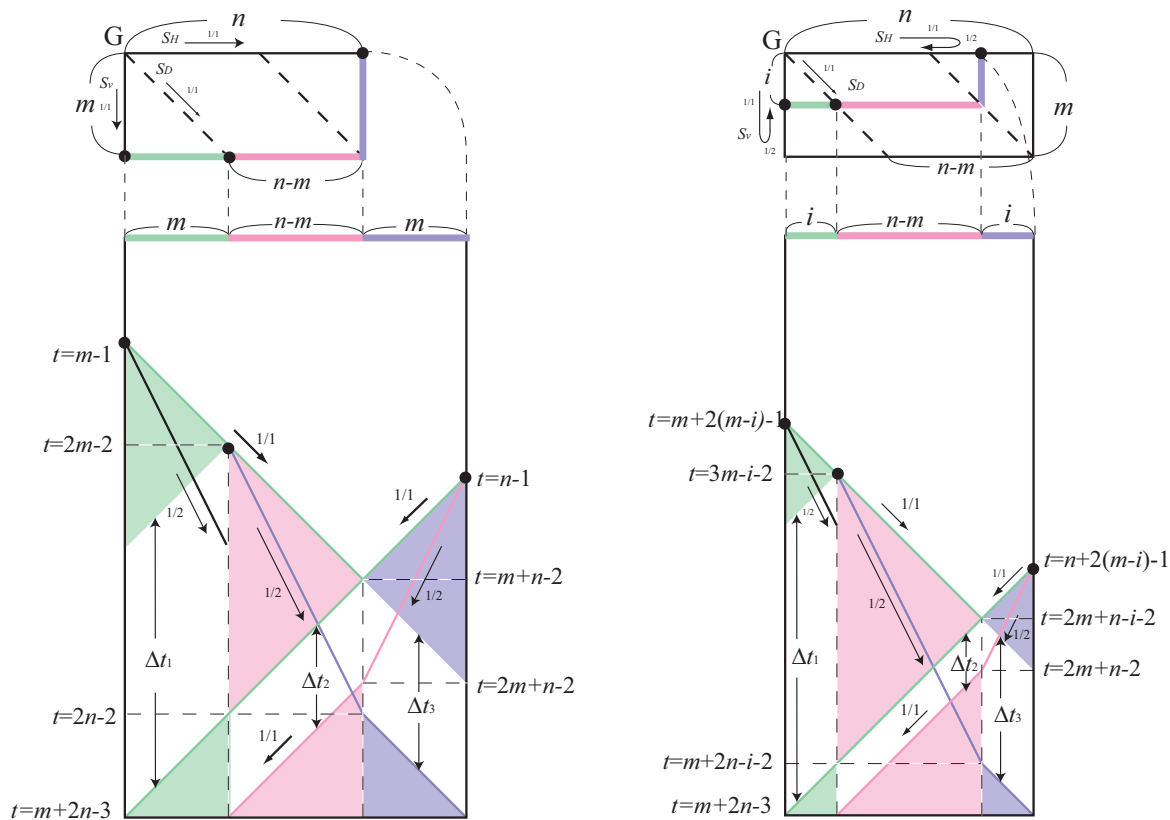


図 5: L_m 及び L_i 上での一斉射撃。

3.5 最適時間一斉射撃アルゴリズム

M をサイズ $m \times n$ の 2 次元セルラーオートマトンとする. M を [定義 1] の $L_1 \sim L_{\min(m,n)}$ に分割する. 分割したセル列は, [補題 2] のアルゴリズムを用いることによって $m+n+\max(m,n)-3$ の時間で同期する事ができる. 以上を次の定理にまとめる.

[定理 3] 任意のサイズ $m \times n (m \geq 2, n \geq 2)$ の 2 次元セルラーオートマトンを $m+n+\max(m,n)-3$ ステップで同期させる M が存在する.

3.6 コンピューター上への実装

$m=8, n=5$ の場合におけるシミュレーション結果を図 6 に示す.

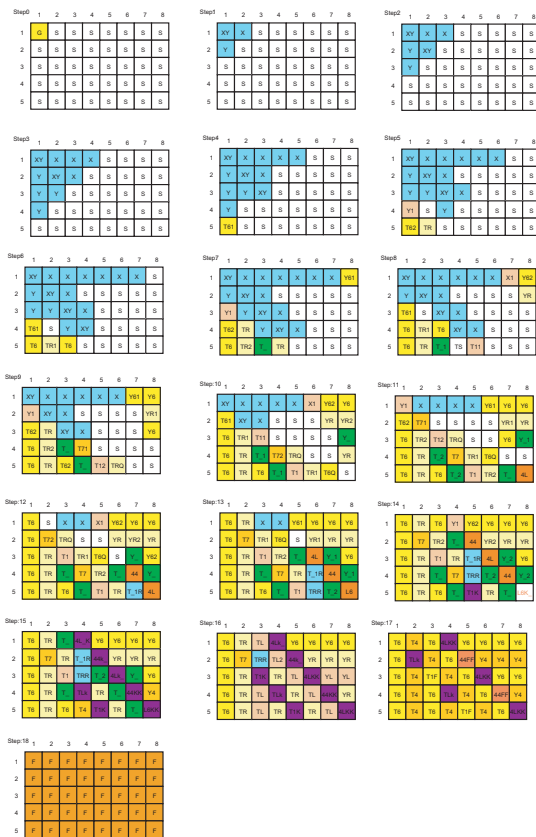


図 6: コンピューター上への実装.

4 おわりに

1 次元セルラーオートマトンにおける最適時間一斉射撃アルゴリズムを, 2 次元セルラーオートマトンにおける最適時間一斉射撃アルゴリズムに拡張する

手法を考案した. 考案したアルゴリズムを Gerken[2] の 7 状態アルゴリズムをベースにシミュレーター上へ部分的な実装を行った. 実装したアルゴリズムは状態数, ルール数が膨大な数になった.

参考文献

- [1] W. T. Beyer: Recognition of topological invariants by iterative arrays. Ph.D. Thesis, MIT, (1969), pp. 144.
- [2] Hans-D., Gerken: Über Synchronisations - Probleme bei Zellularautomaten. *Diplomarbeit*, Institut für Theoretische Informatik, Technische Universität Braunschweig, (1987), pp. 50.
- [3] A. Grasselli: Synchronization of cellular arrays: The firing squad problem in two dimensions. *Information and Control*, vol. 28(1975), pp. 113-124.
- [4] E. F. Moore: The firing squad synchronization problem. in *Sequential Machines, Selected Papers* (E. F. Moore, ed.), Addison-Wesley, Reading MA., (1964), pp. 213-214.
- [5] H. B. Nguyen and V. C. Hamacher: Pattern synchronization in two-dimensional cellular space. *Information and Control*, vol. 26(1974), pp. 12-23.
- [6] I. Shinahr: Two- and three-dimensional firing squad synchronization problems. *Information and Control*, vol. 24(1974), pp. 163-180.
- [7] H. Szwerinski: Time-optimum solution of the firing-squad-synchronization-problem for n -dimensional rectangles with the general at an arbitrary position. *Theoretical Computer Science*, vol. 19(1982), pp. 305-320.
- [8] M. Teraoka, M. Hisaoka, M. Maeda and H. Umeo: A state-efficient implementation of synchronization algorithms for two-dimensional cellular arrays -Extended abstract-. Proc. of the Tenth International Symposium on Artificial Life and Robotics, pp. 350-353, (2005).
- [9] H. Umeo, M. Maeda and N. Fujiwara: An efficient mapping scheme for embedding any one-dimensional firing squad synchronization algorithm onto two-dimensional arrays. *Proc. of the 5th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, LNCS 2493, Springer-Verlag, pp.69-81(2002).
- [10] H. Umeo: A simple design of time-efficient firing squad synchronization algorithms with fault-tolerance. *IEICE Trans. on Information and Systems*, vol. E87-D, No.3, pp.733-739, (2004).
- [11] A. Waksman: An optimum solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 9 (1966), pp. 66-78.